

Filtrare

Filtrarea numerică este una dintre prelucrările cele mai frecvent întâlnite în structura echipamentelor radio definite prin program sau virtuale, fiind folosită pentru modificarea amplitudinilor relative ale componentelor spectrale din semnale or eliminarea completă a unora dintre ele (sau chiar a tuturor). În funcție de lungimea răspunsului la impuls (funcția pondere) filtrele numerice se împart în două grupuri, cu răspuns de lungime finită (eng. FIR – **F**inite **I**mpulse **R**esponse) și cu răspuns de lungime infinită (eng. IIR – **I**nfinite **I**mpulse **R**esponse). Abordarea filtrelor numerice implică parcurgerea următoarelor trei etape ([1]):

- Definirea specificațiilor filtrului în funcție de rolul său în aplicația de prelucrare a semnalelor radio numerice.
- Realizarea specificațiilor prin proiectarea filtrului (alegerea structurii sale și precizarea valorilor elementelor componente).
- Implementarea filtrului prin realizarea blocului de prelucrare fizic (hard) sau virtual (soft).

Mai des utilizate sînt filtrele FIR întrucît au structură simplă, sînt necondiționat stabile și pot avea fază liniară (cu frecvența). Metoda uzuală de proiectare a filtrelor FIR cu fază liniară este cea a *fereștelor temporale*, prin care se trunchiază lungimea ideal infinită a secvenței eșantioanelor funcției pondere $h[n]$ la un număr convenabil N , iar legătura între eșantioanele supuse filtrării $x[k]$ și cele ale rezultatului acestora $y[k]$ este dată de relația 1 (una dintre formele posibile), modelată de schema bloc din figura 1, unde $w[n]$ sînt eșantioanele funcției fereastră aleasă.

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]w[n]x[k+n-N+1] \quad (1)$$

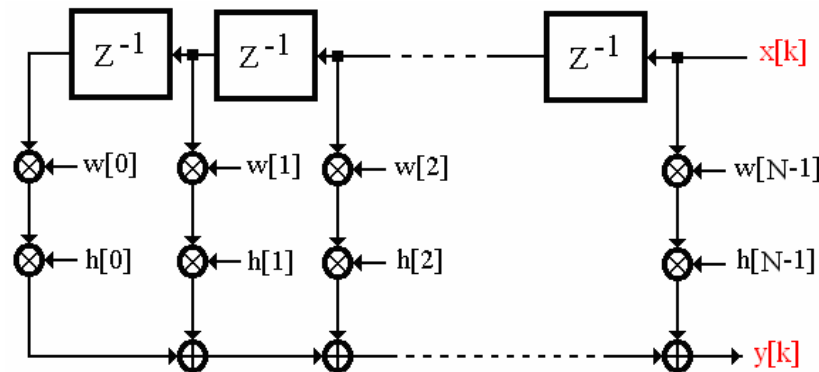


Figura 1

Ca funcții *fereastră temporală* uzuale sînt de menționat următoarele:

- fereastră **rectangulară**

$$w[n] = 1 \quad (2)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

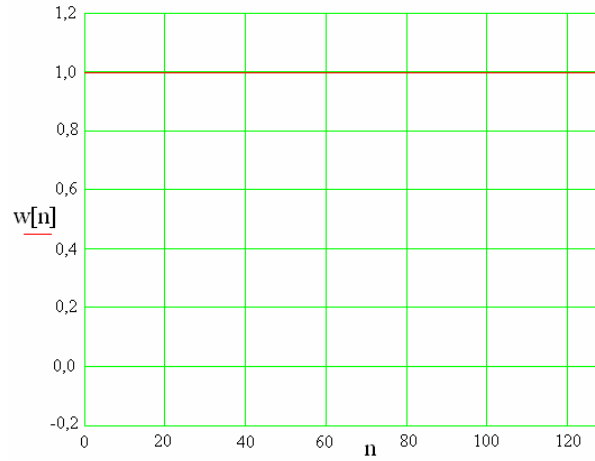


Figura 2 – N=129

- fereastra **triunghiulară** (Fejer, Bartlet)

$$w[n] = 1 - \frac{|N - 2n|}{N} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad N : \text{par} \quad (3)$$

$$w[n] = 1 - \frac{|N - 1 - 2n|}{N - 1} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad N : \text{impar}$$

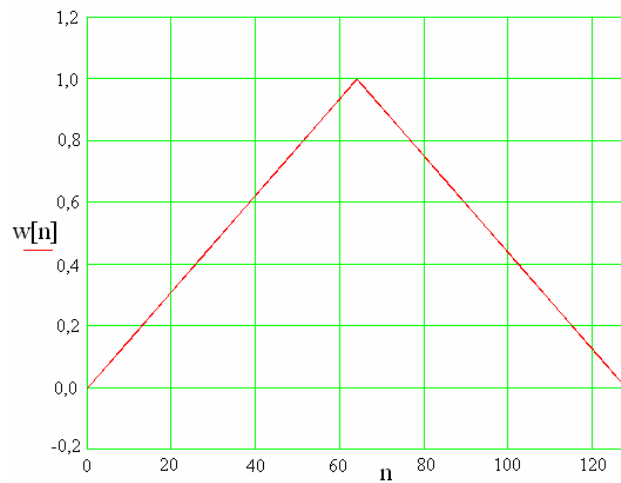


Figura 3 – N=129

- fereastra **parabolică** (Riesz, Bochner, Parzen)

$$w[n] = 1 - \left(\frac{N - 2n}{N} \right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad N : \text{par} \quad (4)$$

$$w[n] = 1 - \left(\frac{N - 1 - 2n}{N - 1} \right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad N : \text{impar}$$

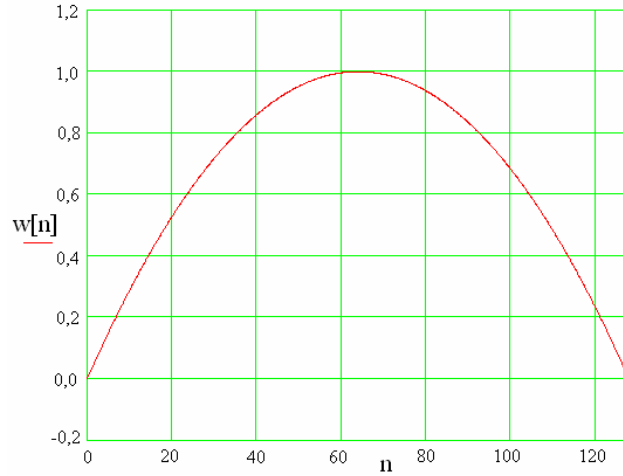


Figura 4 – N=129

▪ fereastra **cosinusoidală**

$$\begin{aligned} w[n] &= \sin\left(\frac{n}{N} \pi\right) & n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) & \quad N : \text{par} \\ w[n] &= \sin\left(\frac{n}{N-1} \pi\right) & n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) & \quad N : \text{impar} \end{aligned} \quad (5)$$



Figura 5 – N=129

▪ fereastra **Hann**

$$\begin{aligned} w[n] &= \sin^2\left(\frac{n}{N} \pi\right) & n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) & \quad N : \text{par} \\ w[n] &= \sin^2\left(\frac{n}{N-1} \pi\right) & n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) & \quad N : \text{impar} \end{aligned} \quad (6)$$

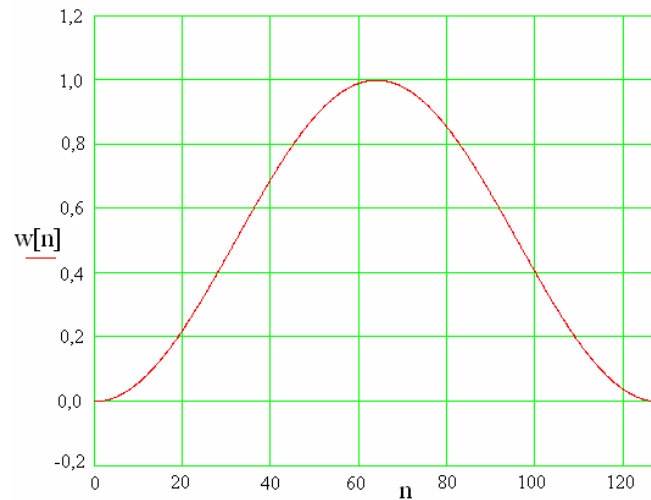


Figura 6 – N=129

▪ fereastra **Hamming**

$$w[n] = 0,538 - 0,462 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \quad n = 0,1,2,\dots,(N-1) \quad N : \text{par} \quad (7)$$

$$w[n] = 0,538 - 0,462 \cos\left(2\pi \frac{n}{N-1}\right) \quad n = 0,1,2,\dots,(N-1) \quad N : \text{impar}$$

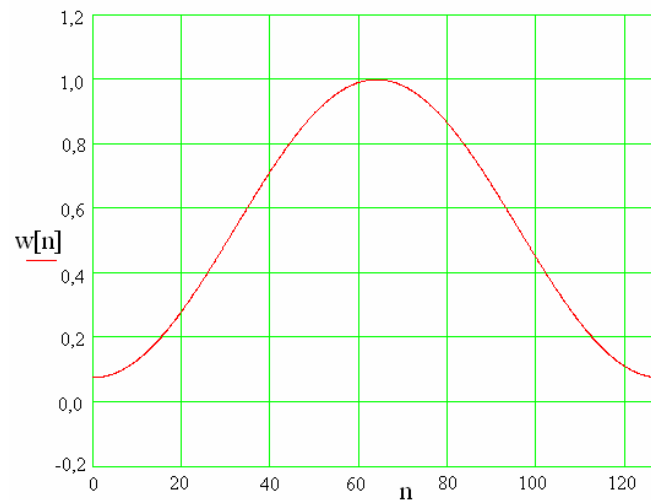


Figura 7 – N=129

▪ fereastra **Blackman**

$$w[n] = 0,42 - 0,50 \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) +$$

$$+ 0,08 \cos\left(\frac{2\pi}{N} 2n\right) \quad n = 0,1,2,\dots,(N-1) \quad N : \text{par}$$

$$w[n] = 0,42 - 0,50 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) + 0,08 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}2n\right) \quad n = 0,1,2,\dots,(N-1) \quad N : \text{impar} \quad (8)$$

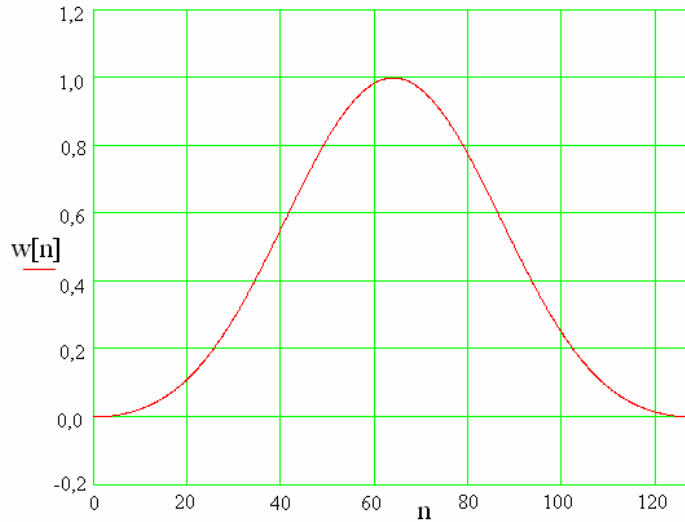


Figura 8 – N=129

- fereastra **Blackman-Harris** (recomandată în analiza performanțelor ADC)

$$w[n] = 0,35875 - 0,48829 \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 0,14128 \cos\left(\frac{2\pi}{N}2n\right) - 0,01168 \cos\left(\frac{2\pi}{N}3n\right) \quad n = 0,1,2,\dots,(N-1) \quad N : \text{par} \quad (9)$$

$$w[n] = 0,35875 - 0,48829 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) + 0,14128 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}2n\right) - 0,01168 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}3n\right) \quad n = 0,1,2,\dots,(N-1) \quad N : \text{impar}$$

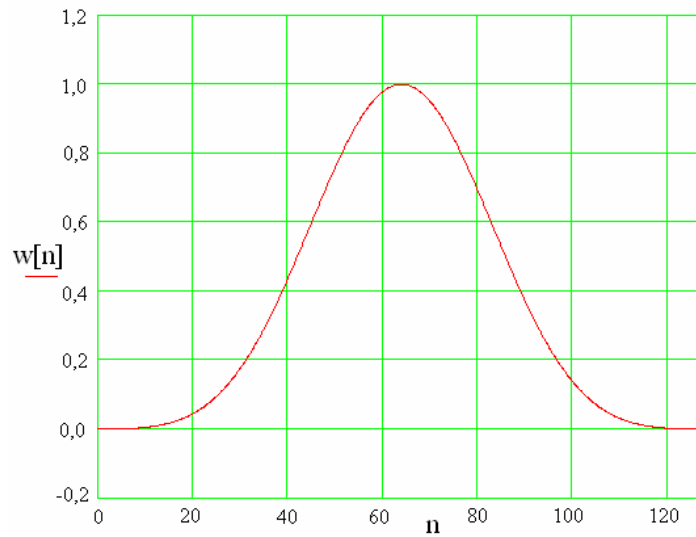


Figura 9 – N=129

- fereastra **Kaiser-Bessel** (uzual $\alpha=3$)

$$w[n] = \frac{I_0 \left[\pi \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n - N}{N} \right)^2} \right]}{I_0(\pi \alpha)} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad N : \text{par} \quad (10)$$

$$w[n] = \frac{I_0 \left[\pi \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n - N + 1}{N - 1} \right)^2} \right]}{I_0(\pi \alpha)} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad N : \text{impar}$$

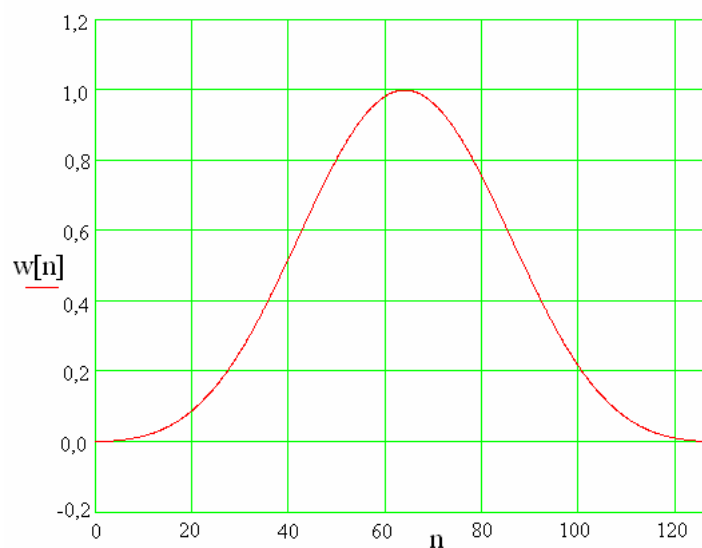


Figura 10 – N=129, $\alpha=3$

- fereastra **flattop** (are ondulații foarte mici în banda de trecere, <0,01 dB, și este utilizată în primul rând la aplicații de calibrare)

$$w[n] = 0.21557895 - 0.41663158 \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) +$$

$$+ 0.277263158 \cos\left(\frac{2\pi}{N}2n\right) -$$

$$- 0.083578947 \cos\left(\frac{2\pi}{N}3n\right) +$$

$$+ 0.006947368 \cos\left(\frac{2\pi}{N}4n\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

$N : \text{par}$

$$w[n] = 0.21557895 - 0.41663158 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) +$$

$$+ 0.277263158 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}2n\right) -$$

$$- 0.083578947 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}3n\right) +$$

$$+ 0.006947368 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}4n\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (11)$$

$N : \text{impar}$

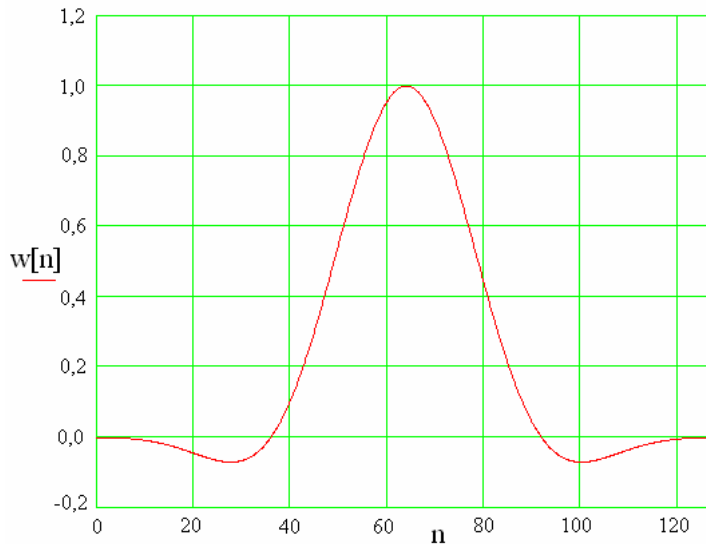


Figura 11 – N=129

Pentru o lungime impară N a *ferestrei temporale* se prezintă în continuare formulele eșantioanelor funcțiilor pondere $h[n]$ ideale pentru filtrele FIR cele mai

utilizate. Toate frecvențele care apar în formule sînt normate la frecvența Nyquist (jumătate din frecvența de eșantionare $1/T_s$) și au semnificațiile din figurile 12 și 13 cu modulul funcțiilor de transfer ale filtrelor.

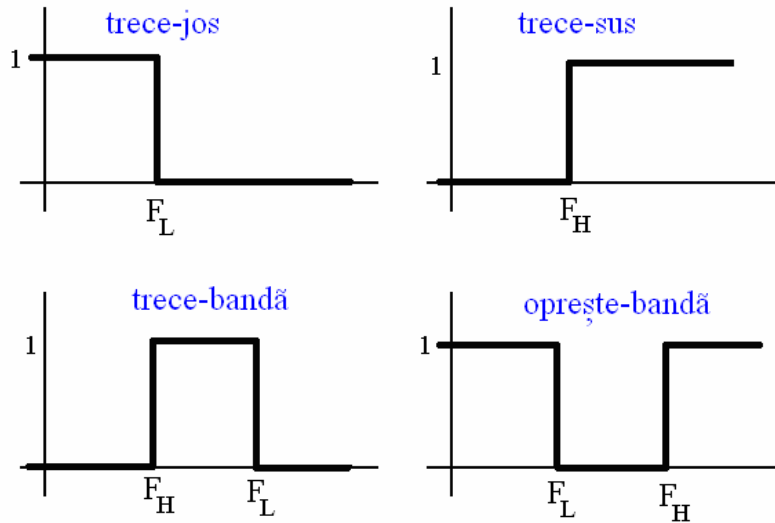


Figura 12

▪ **Trece-jos**

$$h_{\frac{N-1}{2}} = F_L$$

$$h_{\frac{N-1}{2} \pm n} = \frac{\sin(n\pi F_L)}{n\pi} \quad n = 1, 2, \dots, \left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (12)$$

▪ **Trece-sus**

$$h_{\frac{N-1}{2}} = 1 - F_H$$

$$h_{\frac{N-1}{2} \pm n} = -\frac{\sin(n\pi F_H)}{n\pi} \quad n = 1, 2, \dots, \left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (13)$$

▪ **Trece-bandă**

$$h_{\frac{N-1}{2}} = F_L - F_H$$

$$h_{\frac{N-1}{2} \pm n} = \frac{\sin(n\pi F_L) - \sin(n\pi F_H)}{n\pi} \quad n = 1, 2, \dots, \left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (14)$$

▪ **Oprește-bandă**

$$h_{\frac{N-1}{2}} = 1 + F_L - F_H$$

$$h_{\frac{N-1}{2} \pm n} = \frac{\sin(n\pi F_L) - \sin(n\pi F_H)}{n\pi} \quad n = 1, 2, \dots, \left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (15)$$

- **Hilbert** – pentru frecvențe negative filtrul introduce un defazaj de $+90^\circ$ iar pentru frecvențe pozitive un defazaj de -90° .

$$h_{\frac{N-1}{2}} = 0$$

$$h_{\frac{N-1}{2} - n} = \frac{2}{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (16)$$

- **Derivator**

$$h_{\frac{N-1}{2}} = 0$$

$$h_{\frac{N-1}{2} + n} = -h_{\frac{N-1}{2} - n} = \frac{1}{2T_s} \cdot \frac{1}{n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\frac{N-1}{2}} \left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right)} \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (17)$$

- **Trece-jos “cosinus ridicat”** – utilizat în echipamente destinate transmisiilor de date, semnificația frecvențelor fiind aceea din figura 13.

$$h_{\frac{N-1}{2}} = 1$$

$$h_{\frac{N-1}{2} \pm n} = \begin{cases} \frac{\sin(n\pi F_2)}{n\pi F_2} \frac{\cos(n\alpha\pi F_2)}{[1 - (2n\alpha F_2)^2]} & |2n\alpha F_2| \neq 1 \\ \frac{\alpha \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha}\right]}{2} & |2n\alpha F_2| = 1 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (18)$$

$$F_1 = (1 - \alpha)F_2$$

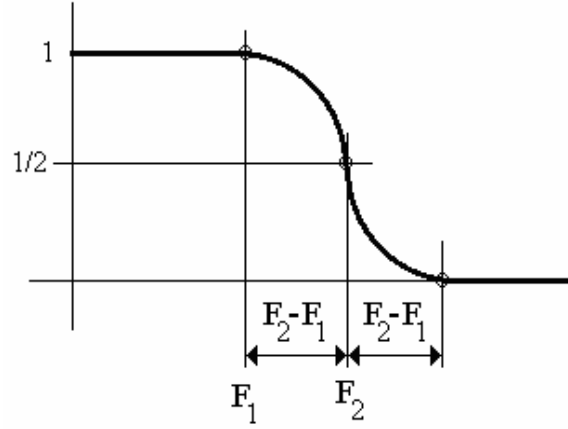


Figura 13

- **Trece-jos “*radical din cosinus ridicat*”** – utilizat în echipamente destinate transmisiilor de date, semnificația frecvențelor fiind aceea din figura 13.

$$h_{\frac{N-1}{2}} = 1$$

$$h_{\frac{N-1}{2} \pm n} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{nF_2} \sin[n\pi(1-\alpha)F_2] + 4\alpha \cos[n\pi(1+\alpha)F_2]}{\pi \left[1 + \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \alpha \right] [1 - (4n\alpha F_2)^2]} & |4n\alpha F_2| \neq 1 \\ \frac{\alpha \left[(\pi + 2) \sin\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right) + (\pi - 2) \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right) \right]}{\sqrt{2}\pi \left[1 + \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \alpha \right]} & |4n\alpha F_2| = 1 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \left(\frac{N-1}{2} \right) \quad (19)$$

$$F_1 = (1 - \alpha)F_2$$

Toate filtrele FIR prezentate introduc întârzieri τ de aceeași valoare, dată de formula (20).

$$\tau = \frac{(N-1)}{2} T_s \quad (20)$$

Modulul funcției de transfer a filtrelor, $H(j\omega)$, depinde de relația de simetrie dintre valorile coeficienților simetric depărtați de centrul filtrului, de ordinul filtrului și de funcția fereastră aleasă (mereu simetrică), astfel:

- coeficienți **simetrici**

$$h_n = h_{N-1-n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N-1}{2} - 1\right)$$

$$|H(j\omega)| = \left| h_{\frac{N-1}{2}} w_{\frac{N-1}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} h_{\frac{N-1}{2}-n} w_{\frac{N-1}{2}-n} \cos(n\omega T_s) \right| \quad (21)$$

- coeficienți **antisimetrici**

$$h_n = -h_{N-1-n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N-1}{2} - 1\right)$$

$$|H(j\omega)| = \left| 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} h_{\frac{N-1}{2}-n} w_{\frac{N-1}{2}-n} \sin(n\omega T_s) \right| \quad (22)$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] – George J. Miao, Mark A. Clements, “*Digital Signal Processing and Statistical Classification*”, Artech House, 2002, ISBN 1-58053-135-0
- [2] – Ricardo A. Losada, “*Practical FIR Filter Design in MATLAB*”, The MathWorks Inc., 2003
- [3] – Howard A. Gaberson, “*A Comprehensive Windows Tutorial*”, Sound and Vibration, Martie 2006